

8.1

a) $x^4 x^6 = x^{4+6} = x^{10}$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

b) $\frac{x^5}{x^4} = x^{5-3} = x^2$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

c) $(4x)^3 = 4^3 x^3 = 64x^3$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

d) $\left(\frac{x}{3}\right)^4 = \frac{x^4}{3^4} = \frac{x^4}{81}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

e) $(x^4)^6 = x^{4 \cdot 6} = x^{24}$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Vastaus

a) x^{10}

b) x^2

c) $64x^3$

d) $\frac{x^4}{81}$

e) x^{24}

8.2

a) $2x^3x^4x^2 = 2x^{3+4+2} = 2x^9$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{18x^5x}{6x^4x^2} &= \frac{18x^{5+1}}{6x^{4+2}} \\ &= \frac{18x^6}{6x^6} \\ &= \frac{18}{6}x^{6-6} \\ &= \frac{18}{6}x^0 \\ &= \frac{18}{6} \cdot 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^0 = 1$$

c)
$$\begin{aligned}(3x^2)^3x^5 &= 3^3 \cdot (x^2)^3x^5 \\ &= 27(x^2)^3x^5 \\ &= 27x^{2 \cdot 3}x^5 \\ &= 27x^6x^5 \\ &= 27x^{6+5} \\ &= 27x^{11}\end{aligned}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Vastaus

a) $2x^9$

b) 3

c) $27x^{11}$

8.3

a) $3,567 \cdot 10^6$
 $= 3\,567\,000$

Pilkku siirtyy 6 askelta oikealle.

b) $1,9876 \cdot 10^{-8}$
 $= 0,000\,000\,019\,876$

Pilkku siirtyy 8 askelta vasemmalle.

Vastaus

a) $3\,567\,000$

b) $0,000\,000\,019\,876$

8.4

a) $154\,000\,000$
 $= 1,54 \cdot 10^8$

Pilkku siirtyy 8 askelta vasemmalle.

b) $0,000\,000\,087\,9$
 $= 8,79 \cdot 10^{-8}$

Pilkku siirtyy 8 askelta oikealle.

Vastaus

a) $1,54 \cdot 10^8$

b) $8,79 \cdot 10^{-8}$

8.5

- a) Uusien kukkien lukumäärä saadaan aina kertomalla edellinen lukumäärä luvulla 7. Taulukoidaan itämiskerrat ja kukkien lukumäärä.

Itämiskerta	Kukkien lukumäärä
0	1
1	$7 \cdot 1 = 7$
2	$7 \cdot 7 = 7^2$
3	$7 \cdot 7^2 = 7^3$
...	...
15	7^{15}

Kun ensimmäisen kukan kukkimisesta on kulunut 15 vuotta, kukkien lukumäärä on

$$7^{15} = 4,747... \cdot 10^{12} \approx 4,75 \cdot 10^{12}.$$

- b) Kun kukka on itänyt ja kukkinut 20 kertaa, kukkien lukumäärä on 7^{20} . Lasketaan, kuinka moninkertainen solujen lukumäärä on verrattuna a-kohdan tulokseen.

$$\frac{7^{20}}{7^{15}} = 16\,807$$

Kukkaa on 16 807-kertainen määrä.

Vastaus

a) $4,75 \cdot 10^{12}$

b) 16 807-kertainen

8.6

Kerrostien lukumäärä saadaan aina kertomalla edellinen lukumäärä luvulla 3. Taulukoidaan taitosten ja kerrostien lukumäärät.

Taitoksien lukumäärä	Kerrostien lukumäärä
0	1
1	$3 \cdot 1 = 3$
2	$3 \cdot 3 = 3^2$
3	$3 \cdot 3^2 = 3^3$
...	...
5	3^5
...	...
10	3^{10}

Pietari taittoi taikinan viisi kertaa. Taitoksia oli siis $3^5 (= 243)$.

Armi taittoi taikinan kymmenen kertaa. Taitoksia oli siis $3^{10} (= 59\,049)$.

Lasketaan, kuinka moninkertainen Armin taitosten lukumäärä oli verrattuna Pietarin taitosten lukumäärään.

$$\frac{3^{10}}{3^5} = 243$$

Taitoksia oli siis 243-kertainen määrä.

Vastaus

243-kertainen

8.7

a) $6,1^{-7} = 3,1819... \cdot 10^{-6} \approx 3,18 \cdot 10^{-6}$

Oikea vastausvaihtoehto on siis 2.

b) $0,9^{317} = 3,1251... \cdot 10^{-15} \approx 3,13 \cdot 10^{-15}$

Oikea vastausvaihtoehto on siis 3.

c) $\left(\frac{10}{61}\right)^7 = 3,1819... \cdot 10^{-6} \approx 3,18 \cdot 10^{-6}$

Oikea vastausvaihtoehto on siis 2.

d) $\left(\frac{100}{99}\right)^{-117} = 0,3085... \approx 0,309$

Oikea vastausvaihtoehto on siis 5.

Vastaus

a) 2

b) 3

c) 2

d) 5

8.8

Maapinta-ala on 6,4 biljoonaa neliometriä, eli $64,5 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$.

Ihmisiä on 8,0 miljardia, eli $8,0 \cdot 10^9$.

Lasketaan, kuinka monta neliometriä on ihmistä kohti.

$$\frac{64,5 \cdot 10^{12} \text{ m}^2}{8,0 \cdot 10^9} = 8062,5 \text{ m}^2 \approx 8100 \text{ m}^2$$

Vastaus

8100 m²

8.9

- a) Lasketaan laskimella ja pyöristetään kahden numeron tarkkuuteen.

$$3^{206} = 1,936... \cdot 10^{98} \approx 1,9 \cdot 10^{98}$$

$$5^{137} = 5,739... \cdot 10^{95} \approx 5,7 \cdot 10^{95}$$

- b) Luvun 3^{206} kymmenpotenssimuodon eksponentti on suurempi. Luku on siis suurempi.

- c) Kokonaisluvussa 3^{206} on $98 + 1 = 99$ numeroa.

Kokonaisluvussa 5^{137} on $95 + 1 = 96$ numeroa.

Vastaus

- a) $3^{206} \approx 1,9 \cdot 10^{98}$, $5^{137} \approx 5,7 \cdot 10^{95}$

- b) 3^{206}

- c) Luvussa 3^{206} on 99 numeroa, luvussa 5^{137} on 96 numeroa.

8.10

- a) Viestien lukumäärä saadaan aina kertomalla edellinen lukumäärä luvulla 5. Taulukoidaan sukupolvet ja viestien määrä.

Sukupolvi	Viestien lukumäärä
1	5
2	$5 \cdot 5 = 5^2$
3	$5 \cdot 5^2 = 5^3$
...	...
20	5^{20}

Toisessa sukupolvessa lähetetään $5^2 = 25$ viestiä.

Kolmannessa sukupolvessa lähetetään $5^3 = 125$ viestiä.

20. sukupolvessa lähetetään $5^{20} = 9,536... \cdot 10^{13} \approx 9,5 \cdot 10^{13}$ viestiä.

- b) Lasketaan, kuinka moninkertainen 20. sukupolven viestien lukumäärä 5^{20} on verrattuna maapallon väkilukuun $7,8$ miljardia $= 7,8 \cdot 10^9$.

$$\frac{5^{20}}{7,8 \cdot 10^9} = 12\,226,5... \approx 12\,000$$

Jokaista maapallon asukasta kohden on $12\,000$ viestiä.

Vastaus

- a) 25, 125 ja $9,5 \cdot 10^{13}$
b) 12 000

8.11

a) $2x^3x^4 = 2x^{3+4} = 2x^7$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

b) $\frac{x^7}{x^2} = x^{7-2} = x^5$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

c) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

d) $\left(\frac{2x}{5}\right)^2 = \frac{(2x)^2}{5^2} = \frac{2^2 \cdot x^2}{25} = \frac{4x^2}{25}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (ab)^n = a^n b^n$$

e) $(2x^3)^4 = 2^4 \cdot (x^3)^4 = 16x^{3 \cdot 4} = 16x^{12}$

$$(ab)^n = a^n b^n, (a^m)^n = a^{mn}$$

Vastaus

a) $2x^7$

b) x^5

c) $8x^3$

d) $\frac{4x^2}{25}$

e) $16x^{12}$

8.12

$$\begin{aligned}\text{a) } (5x \cdot x^4)^3 &= (5x^4x)^3 \\ &= (5x^5)^3 \\ &= 5^3 \cdot (x^5)^3 \\ &= 125x^{15}\end{aligned}$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \left(\frac{6x^4}{3x}\right)^5 &= \left(\frac{6}{3} \cdot \frac{x^4}{x}\right)^5 \\ &= (2x^3)^5 \\ &= 2^5 \cdot (x^3)^5 \\ &= 32x^{15}\end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Vastaus

$$\text{a) } (5x \cdot x^4)^3 = 125x^{15}$$

$$\text{b) } \left(\frac{6x^4}{3x}\right)^5 = 32x^{15}$$

8.13

a) $2,292 \cdot 10^{12}$
 $= 2\,292\,000\,000\,000$

Pilkku siirtyy 12 askelta oikealle.

b) $5,125 \cdot 10^{-9}$
 $= 0,000\,000\,005\,125$

Pilkku siirtyy 9 askelta vasemmalle.

Vastaus

a) $2\,292\,000\,000\,000$

b) $0,000\,000\,005\,125$

8.14

a) 91 900 000 000
 $= 9,19 \cdot 10^{10}$

Pilkku siirtyy 10 askelta vasemmalle.

b) 0,000 001 205
 $= 1,205 \cdot 10^{-6}$

Pilkku siirtyy 6 askelta oikealle.

Vastaus

a) $9,19 \cdot 10^{10}$

b) $1,205 \cdot 10^{-6}$

8.15

Uusien oksien lukumäärä saadaan aina kertomalla edellinen lukumäärä luvulla 2. Taulukoidaan haarautumiskerrat ja oksien lukumäärä.

Haarautumiskerta	Oksien lukumäärä
0	1
1	$2 \cdot 1 = 2$
2	$2 \cdot 2 = 2^2$
3	$2 \cdot 2^2 = 2^3$
4	2^4
...	...
10	2^{10}

a) Kun binääripuu on haarautunut neljä kertaa, oksien lukumäärä on

$$2^4 = 16.$$

b) Kun puu on haarautunut kymmenen kertaa, oksien lukumäärä on

$$2^{10} = 1024.$$

Vastaus

a) 16

b) 1024

8.16

Uusien kerrosten lukumäärä saadaan aina kertomalla edellinen lukumäärä luvulla 2. Taulukoidaan taittamiskerrat ja kerrosten lukumäärä.

Taittamiskerta	Taitosten lukumäärä
0	1
1	$2 \cdot 1 = 2$
2	$2 \cdot 2 = 2^2$
3	$2 \cdot 2^2 = 2^3$
...	...
20	2^{20}

- a) Kun arkki on taitettu 20 kertaa, kerrosten lukumäärä on $2^{20} = 1\,048\,576$.

Taitetun paperiarkin paksuus on

$$1\,048\,576 \cdot 0,11 \text{ mm} = 115\,343,36 \text{ mm} \approx 115 \text{ m}.$$

Taitetun arkin korkeus siis yltäisi Puijon tornin huipulle.

- b) Kun arkki on taitettu 60 kertaa, kerrosten lukumäärä on 2^{60} .

Arkin korkeus on tällöin $2^{60} \cdot 0,11 \text{ mm}$.

Ilmaistaan Maan etäisyys Auringosta millimetreinä.

$$149,6 \cdot 10^6 \text{ km} = 149,6 \cdot 10^{12} \text{ mm}$$

Lasketaan, kuinka moninkertainen taitetun arkin korkeus on verrattuna Maan etäisyyteen Auringosta.

$$\frac{2^{60} \cdot 0,11}{149,6 \cdot 10^{12}} = 847,736... \approx 850$$

Arkin korkeus on 850-kertainen.

Vastaus

- a) Kyllä.

- b) 850-kertainen

8.17

Vuodessa on 365 päivää. Päivässä on 24 tuntia. Tunnissa on 60 minuuttia. Minuutissa on 60 sekuntia.

Tino täyttää 16 vuotta. Lasketaan, kuinka monta sekuntia on 16 vuodessa.

$$16 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 504\,576\,000 \approx 5,05 \cdot 10^8 \text{ (s)}$$

Tino on siis elänyt $5,05 \cdot 10^8$ sekuntia.

Vastaus

$$5,05 \cdot 10^8 \text{ s}$$

8.18

- a) Lasketaan laskimella ja pyöristetään kahden numeron tarkkuuteen.

$$7^{75} = 2,411... \cdot 10^{63} \approx 2,4 \cdot 10^{63}$$

$$8^{65} = 5,021... \cdot 10^{58} \approx 5,0 \cdot 10^{58}$$

- b) Luvun 7^{75} kymmenpotenssimuodon eksponentti on suurempi. Luku on siis suurempi.

- c) Kokonaisluvussa 7^{75} on $63 + 1 = 64$ numeroa.

Kokonaisluvussa 8^{65} on $58 + 1 = 59$ numeroa.

Vastaus

- a) $7^{75} \approx 2,4 \cdot 10^{63}$, $8^{65} \approx 5,0 \cdot 10^{58}$

- b) 7^{75}

- c) Luvussa 7^{75} on 64 numeroa, luvussa 8^{65} on 59 numeroa.

8.19

- a) Edellisen vuoden väkiluku saadaan aina kertomalla väkiluku luvun 1,011 käänteisluvulla, eli luvulla $\frac{1}{1,011} = 1,011^{-1}$.

...vuotta ennen vuotta 2020	Väkiluku
0	$1,3 \cdot 10^9$
1	$1,3 \cdot 10^9 \cdot 1,011^{-1}$
2	$(1,3 \cdot 10^9 \cdot 1,011^{-1}) \cdot 1,011^{-1} = 1,3 \cdot 10^9 \cdot 1,011^{-2}$
3	$(1,3 \cdot 10^9 \cdot 1,011^{-2}) \cdot 1,011^{-1} = 1,3 \cdot 10^9 \cdot 1,011^{-3}$
...	...
40	$1,3 \cdot 10^9 \cdot 1,011^{-40}$

Intian väkiluku vuonna 1980 oli $1,3 \cdot 10^9 \cdot 1,011^{-40} \approx 839 \cdot 10^6$ eli 839 miljoonaa.

- b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia suurempi 839 miljoonaa on kuin 699 miljoonaa.

$$\frac{839 \cdot 10^9 - 699 \cdot 10^9}{699 \cdot 10^9} = 0,200... \approx 20 \%$$

Arvio on siis 20 % suurempi kuin todellinen väkiluku.

Vastaus

- a) 839 miljoonaa
b) Arvio on 20 % suurempi.

8.20

Jos kolme ihmistä laitettaisiin neliömetrille, mahtuisi aukiolle 51 000 juhlijaa. Lasketaan aukion pinta-ala.

$$\frac{51\,000}{3} = 17\,000$$

Aukion pinta-ala on siis 17 000 m². Lasketaan, kuinka monta ihmistä pitäisi olla neliömetrillä, jos ihmisiä olisi kaksi miljoonaa.

$$\frac{2 \cdot 10^6}{17\,000} = 117,647... \approx 118$$

Yhdelle neliömetrille olisi siis laitettava 118 ihmistä.

Yhdelle ihmiselle olisi tällöin tilaa

$$\frac{1 \cdot 10^4 \text{ cm}^2}{118} = 84,745... \text{ cm}^2 \approx 85 \text{ cm}^2. \qquad 1 \text{ m}^2 = 1 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$$

Aikuisen ihmisen jalkapohjien yhteenlaskettu pinta-ala on arviolta

$$2 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} = 500 \text{ cm}^2.$$

Siis jos aukiolla olisi kaksi miljoonaa ihmistä, yhdelle ihmiselle jäävä tila olisi pienempi kuin aikuisen ihmisen jalkapohjien pinta-ala.

Vastaus

118 ihmistä, maata jalkojen alla olisi 85 cm², pinta-ala on pienempi kuin järkevä arvio jalkojen pinta-alasta.